

УДК 539.3

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРУБ ИЗ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИКОВ

*А.В. Коротков, Ю.А. Куликов*

### Аннотация

Рассмотрены параметрические колебания тонкостенных криволинейных труб под действием пульсирующего внутреннего давления. При помощи полубезмоментной теории анизотропных слоистых оболочек и уравнений Лагранжа построена связанная система однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами жесткости. Выполнен расчет собственных форм и частот колебаний. Результаты аналитического решения сопоставлены с данными расчета с помощью МКЭ и эксперимента. Методом малого параметра определены границы областей параметрического возбуждения. Исследовано расположение резонансных полос, соответствующих главным простым и комбинационным параметрическим резонансам, в зависимости от постоянной составляющей давления, структурных, геометрических параметров и демпфирования.

**Ключевые слова:** параметрические колебания, криволинейная труба, многослойный армированный пластик, собственные формы и частоты, динамическая устойчивость, параметрические резонансы.

### Введение

Одним из источников упругих колебаний труб и трубопроводов являются пульсации давления рабочей среды. Под действием пульсирующего давления труба совершает обычные вынужденные колебания, связанные с растяжением-сжатием стенки (труба «дышит»). В определенных условиях стационарные режимы колебаний становятся динамически неустойчивыми, в системе развивается параметрический резонанс.

В отличие от металлов, трубы из армированных пластиков более податливы (деформативны), обладают более широким спектром физико-механических свойств с ярко выраженной анизотропией. Эти особенности материала обуславливают ряд характерных особенностей взаимодействия трубы с внутренним потоком, делают процесс взаимодействия более «сильным». В частности, за счет большей податливости стенки уже в относительно коротких трубах при достаточно продолжительном (в традиционном представлении) времени возмущения развиваются волновые гидроупругие процессы и с ними приходится считаться.

Известен ряд работ по исследованию устойчивости осесимметричных форм колебаний прямолинейных труб как тонкостенных цилиндрических оболочек (см., например, [1–3]). Отличительной особенностью параметрических колебаний криволинейных труб как тонкостенных торообразных оболочек является возникновение, наряду с простыми резонансами, комбинационных резонансов по смешанным формам [4].

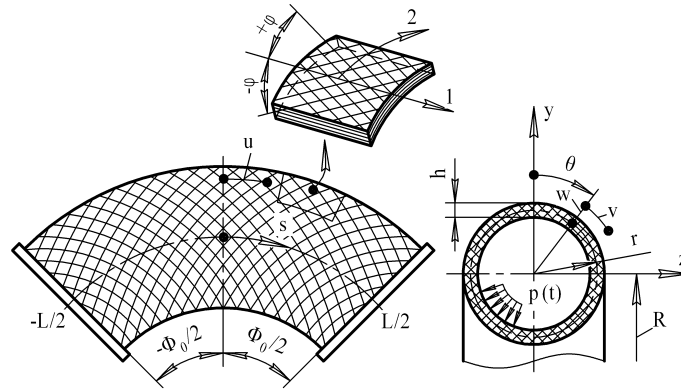


Рис. 1. Расчетная схема

### 1. Расчетная динамическая модель

Рассмотрим криволинейную трубу (рис. 1), осевая линия которой представляет собой дугу окружности радиуса  $R$  длиной  $L$  с центральным углом  $\Phi_0$ . Труба имеет круглое поперечное сечение со средним радиусом  $r$ , толщиной стенки  $h$ . Ограничимся трубами малой кривизны ( $r/R \leq 1/5$ ).

Стенка трубы образована перекрестной спиральной намоткой двух симметричных систем волокон или армированной ленты на оправку. Волокна укладываются по траекториям с постоянными углами армирования  $\pm\varphi$ . Слои располагаются симметрично относительно срединной поверхности оболочки. Края труб закрыты абсолютно жесткими невесомыми заглушками.

Используем правые ортогональные системы координат. Координаты  $\alpha, \beta$  связываем с осями упругой симметрии монослоя: оси  $\alpha$  и  $\beta$  ориентируем вдоль и поперек волокон соответственно. Координаты 1, 2 совмещаем с линиями главной кривизны срединной поверхности оболочки, координаты  $y, z$  – с плоскостью поперечного сечения.

Труба находится под действием моногармонического внутреннего давления

$$p(t) = p_m + p_*(t) = p_m(1 + \psi \cos \Omega t), \quad (1)$$

где  $p_m$  – постоянная составляющая давления,  $\psi = p_0/p_m \ll 1$  – параметр пульсаций,  $p_0$  и  $\Omega$  – амплитуда и круговая частота,  $t$  – время.

Форму возмущенного движения, соответствующую динамической потере устойчивости, связываем с изгибными деформациями стенки и аппроксимируем функциями вида:

$$\begin{aligned} w(s, \theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{w}_{1n}(s, t) \cos n\theta + \tilde{w}_{2n}(s, t) \sin n\theta]; \\ v(s, \theta, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\tilde{w}_{1n}(s, t) \sin n\theta - \tilde{w}_{2n}(s, t) \cos n\theta); \\ \tilde{w}_{m1}(s, t) &= w_{m1} \left(1 - \cos \frac{\pi s}{L}\right); \quad \tilde{w}_{mn}(s, t) = w_{mn} \cos \frac{\pi s}{L}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $v$  и  $w$  – перемещения точек срединной поверхности в окружном и радиальном направлениях;  $s$  и  $\theta$  – осевая и окружная координаты;  $w_{mn} = w_{mn}(t)$  – обобщенные координаты, соответствующие стержневым ( $m = 1, 2$  и  $n = 1$ )

и оболочечным ( $m = 1, 2$  и  $n = 2, 3, \dots$ ) формам. Индекс  $m = 1$  соответствует движениям в плоскости трубы, индекс  $m = 2$  – по нормали к плоскости.

Нулевая гармоника соответствует осесимметричной форме движения, связанной с растяжением-сжатием стенки. Как правило, собственные частоты для осесимметричных форм движения значительно выше, чем для несимметричных. Поэтому при выводе разрешающих уравнений составляющей  $n = 0$  пренебрегаем. Движение отсчитываем от недеформированного состояния. При этом стержневая (балочная) форма отражает перемещения, связанные с движениями поперечного сечения трубы как жесткого целого. Оболочечные формы – перемещения, связанные с изгибными деформациями оболочки. Рассматриваются  $n = 2, 3, \dots$  волн в окружном и одна полуволна в осевом направлениях.

Для вывода уравнений возмущенного движения воспользуемся уравнениями Лагранжа вида:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{w}_{mn}} \right) + \frac{\partial \Lambda}{\partial w_{mn}} + \frac{\partial (\Pi + W - K)}{\partial w_{mn}} = Q_{mn}(t). \quad (3)$$

Здесь  $Q_{mn}(t)$  – обобщенные внешние силы, отнесенные к обобщенным координатам  $w_{mn}(t)$ .

Кинетическая энергия

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \rho r h \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) ds d\theta = \\ &= \frac{1}{8} m_T L \left[ \left( \frac{6\pi - 16}{\pi} \right) (\dot{w}_{11}^2 + \dot{w}_{22}^2) + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{n^2 + 1}{n^2} \right) (\dot{w}_{1n}^2 + \dot{w}_{2n}^2) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $m_T = 2\pi\rho rh$  – масса единицы длины трубы,  $\rho$  – плотность.

В качестве характеристики рассеяния механической энергии используем диссипативную функцию Рэлея

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{2} b r \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) ds d\theta = \\ &= \frac{1}{4} \pi b r L \left[ \left( \frac{6\pi - 16}{\pi} \right) (\dot{w}_{11}^2 + \dot{w}_{22}^2) + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{n^2 + 1}{n^2} \right) (\dot{w}_{1n}^2 + \dot{w}_{2n}^2) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $b$  – коэффициент сопротивления движению.

Упругий потенциал, построенный на основе полубезмоментной теории анизотропных слоистых оболочек, имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} r \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} (B_1 \varepsilon_1^2 + D_2 \kappa_2^2) ds d\theta = \frac{\pi B_1}{4} r L \times \\ &\times \left[ \frac{\pi^4 r^2}{L^4} (w_{11}^2 + w_{21}^2) - \frac{2\pi^2 r}{L^2} (g_{11} w_{11} + g_{21} w_{21}) + \sum_{n=1}^{\infty} (g_{1n}^2 + g_{2n}^2) \right] + \\ &+ \frac{\pi D_2 L}{4r^3} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)^2 (w_{1n}^2 + w_{2n}^2); \end{aligned} \quad (6)$$

$$g_{1n} = \frac{n-2}{n-1} \frac{w_{1n-1}}{2R} + \frac{n+2}{n+1} \frac{w_{1n+1}}{2R}; \quad g_{2n} = \frac{n-2}{n-1} \frac{w_{2n-1}}{2R} + \frac{n+2}{n+1} \frac{w_{2n+1}}{2R}.$$

Здесь  $\varepsilon_1$  и  $\kappa_2$  – линейная деформация и изменение кривизны стенки в осевом и окружном направлениях;  $B_1 = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$  и  $D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$  – жесткости стенки на растяжение-сжатие в осевом направлении и на изгиб в окружном соответственно;  $E_1$ ,  $E_2$  и  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$  – модули упругости и коэффициенты Пуассона многослойного пакета как ортотропного тела [5–7].

Для трубы под давлением потенциал консервативных внешних сил имеет вид

$$W = \frac{1}{2} p_m \Delta V = \frac{1}{4} \pi p_m L \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) (w_{1n}^2 + w_{2n}^2). \quad (7)$$

Виртуальная работа неконсервативных внешних сил на возможных перемещениях может быть вычислена по формуле

$$\partial U = p_*(t) \delta(\Delta V) = \frac{1}{2} \pi p_*(t) L \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) (w_{1n} \delta w_{1n} + w_{2n} \delta w_{2n}). \quad (8)$$

Здесь  $\Delta V = r \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left[ w - \frac{v}{2r} \left( \frac{dw}{d\theta} - v \right) \right] ds d\theta$  – изменение объема внутренней

полости в результате изгиба стенки трубы [8, 9],  $\delta$  – знак изохронной вариации. Коэффициенты при вариациях обобщенных координат определяют обобщенные силы  $Q_{mn}(t)$ .

Подставляя в уравнения Лагранжа (3) выражения (4)–(7) и дифференцируя, с учетом (8) получим две независимые системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами жесткости вида:

$$[A]\{\ddot{w}\} + 2\varepsilon[B]\{\dot{w}\} + \tilde{\alpha}([C] - 2\mu[F] \cos \Omega t)\{w\} = 0, \quad (9)$$

которые описывают параметрические колебания трубы как в плоскости ее кривизны, так и по нормали к плоскости. Здесь  $\tilde{\alpha} = \frac{6\pi D_2}{m_T r^3}$  – множитель,  $\mu = \frac{1}{2} \tilde{p}_0$  –

коэффициент параметрического возбуждения,  $\tilde{p}_0 = \frac{p_0 r^3}{3D_2}$  – параметр пульсаций

давления,  $\varepsilon = \frac{\pi b r}{m_T}$  – коэффициент диссипации. Элементы матриц  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  и  $[F]$  определяются рекуррентными формулами:

$$\begin{aligned} a_{11} = b_{11} &= \frac{6\pi - 16}{\pi}; \quad a_{nn} = b_{nn} = \frac{n^2 + 1}{n^2}; \quad c_{11} = \frac{4}{\zeta \lambda^2} \eta^2; \\ c_{12} &= -\frac{3}{\zeta \lambda^2} \eta; \quad c_{n \ n+2} = \frac{1}{\zeta \lambda^2} \frac{(n-1)(n+3)}{n(n+2)}; \quad f_{nn} = n^2 - 1; \\ c_{nn} &= \frac{1}{\zeta \lambda^2} \left[ \left( \frac{n+1}{n} \right)^2 + \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \right] + \frac{1}{3} (n^2 - 1)(n^2 - 1 + 3\tilde{p}_m), \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\zeta = \frac{E_2}{E_1}$ ,  $\eta = \frac{\pi^2 r R}{L^2}$ ,  $\lambda = \frac{R h}{r^2}$ ,  $\tilde{p}_m = \frac{p_m r^3}{3D_2}$  – безразмерные параметры.

Система однородных дифференциальных уравнений (9) описывает параметрические колебания связанной оболочечно-стержневой системы. Источником параметрического возбуждения служит периодическое изменение объема внутренней

полости. Давление «работает» не на основных (осесимметричных), а на дополнительных перемещениях, связанных с изгибными деформациями оболочки.

Взаимодействие обобщенных координат  $w_n(t)$  определяется упругими связями. Интенсивность связей характеризуется недиагональными элементами матрицы  $[C]$ . Взаимодействие координат  $w_1(t)$  и  $w_2(t)$ , соответствующих стержневой и оболочечной формам, зависит от длины трубы  $L$  и параметра кривизны  $r/R$ . Чем короче труба и больше параметр кривизны, тем сильнее взаимные связи. Взаимодействие координат  $w_n(t)$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), соответствующих оболочечным формам, зависит от параметра трубы  $\lambda$  и волнового числа  $n$ . Чем больше параметр  $\lambda$  и число  $n$ , тем слабее эти связи. Причем четные ( $n = 2, 4, 6, \dots$ ) и нечетные ( $n = 3, 5, 7, \dots$ ) гармоники взаимодействуют друг с другом отдельно.

При  $1/R \rightarrow 0$  матрица  $[C]$  приводится к диагональному виду. В этом случае связанная система дифференциальных уравнений (9) распадается, из нее выделяется система независимых уравнений Матье:

$$\ddot{w}_n + 2\varepsilon\dot{w}_n + \omega_n^2(1 - 2\mu_n \cos \Omega t)w_n = 0, \quad (n = 2, 3, \dots), \quad (11)$$

где

$$\omega_n^2 = \frac{2\pi D_2 n^2 (n^2 - 1)(n^2 - 1 + 3\tilde{p}_m)}{m_T r^3 (n^2 + 1)}, \quad \mu_n = \frac{3\tilde{p}_0}{2(n^2 - 1 + 3\tilde{p}_m)}. \quad (12)$$

Уравнения (11) описывают параметрические колебания тонкостенной цилиндрической оболочки (кольца) и совпадают с содержащимися в [2, 3]. При  $\omega_n = 0$  получим:

$$p_{kp} = p_m = \frac{(n^2 - 1)D_2}{r^3}. \quad (13)$$

Формула (13) определяет критические значения наружного давления, при котором цилиндрическая оболочка теряет статическую устойчивость [8].

При  $w_n(t) = 0$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) из уравнений (9) выделяется однородное дифференциальное уравнение свободных колебаний консоли длиной  $L/2$ :

$$\ddot{w}_1 + 2\varepsilon\dot{w}_1 + \omega_1^2 w_1 = 0. \quad (14)$$

При этом

$$\omega_1 = \frac{14.66}{L^2} \sqrt{\frac{E_1 I_z}{m_T (1 - \nu_{12} \nu_{21})}}. \quad (15)$$

Здесь  $I_z \approx \pi r^3 h$  – осевой момент инерции поперечного сечения. При  $\nu_{12} = 0$  или  $\nu_{21} = 0$  расхождение  $\omega_1$  с точным значением [2] составляет 4.2%.

В условиях номинального режима рассматриваем трубу как параметрически возбуждаемую систему с малой глубиной модуляции параметра  $\mu$  и слабым демпфированием. Анализ динамической устойчивости ограничиваем областью низших собственных форм и частот. Считаем, что формы потери динамической устойчивости совпадают с формами собственных колебаний трубы как консервативной динамической системы [5, 6]. Для расчета границ областей параметрического возбуждения воспользуемся методом малого параметра [1, 2].

Редуцированная система уравнений (9), записанная в главных координатах, примет вид:

$$\{\ddot{w}\} + 2\varepsilon[B^*]\{\dot{w}\} + [C^*](1 - 2\mu[F^*] \cos \Omega t)\{w\} = 0. \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} [B^*] &= [\Phi]^{-1}[A]^{-1}[B][\Phi] \equiv [I]; \\ [C^*] &= \tilde{\alpha}[\Phi]^{-1}[A]^{-1}[C][\Phi] \equiv \text{diag}(\omega_j^2); \\ [F^*] &= \tilde{\alpha}[C^*]^{-1}[\Phi]^{-1}[A]^{-1}[F][\Phi], \end{aligned} \quad (17)$$

где  $[\Phi] = [\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_k]$  – матрица, составленная по столбцам из  $k$  низших собственных форм;  $\omega_j$  – собственная частота ( $j = 1, 2, \dots, k$ );  $[I]$  – единичная матрица.

Рассеяние энергии учитываем при помощи модальных коэффициентов  $\varepsilon_j = \xi \omega_j$ , где  $\xi = \delta/(2\pi)$  – относительное демпфирование,  $\delta$  – логарифмический декремент колебаний,  $\varepsilon_j$  – коэффициент демпфирования  $j$ -й собственной формы.

Границы областей динамической неустойчивости определяются формулами первого приближения. Для главных простых резонансов  $\omega = 2\omega_j$ :

$$\omega \approx 2\omega_j \left( 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mu^2 f_{jj}^{*2} - 4\varepsilon_j^2} \right), \quad (18)$$

где  $f_{jj}^*$  – диагональные элементы матрицы  $[F^*]$ .

Наличие упругих взаимных связей обуславливает комбинационные резонансы по смешанным формам. Для главных комбинационных резонансов суммарного типа граничные частоты

$$\omega \approx \omega_i + \omega_j \pm \frac{\varepsilon_i \omega_i + \varepsilon_j \omega_j}{2\sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j}} \sqrt{\mu^2 f_{ij}^* f_{ji}^* - 4\varepsilon_i \varepsilon_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, k. \quad (19)$$

Для практических приложений точность формул (18) и (19) достаточна вплоть до значений  $\mu = 1/2$  [1].

## 2. Оценка точности модели

Для оценки точности аналитического решения воспользуемся МКЭ и восьмиузловым изопараметрическим КЭ Ахмада, так называемым «вырожденным» элементом оболочки [10, 11]. Оболочка представляется в виде вырожденного трехмерного тела.

Свободные колебания трубы как динамической системы с большим числом степеней свободы описываются однородной системой дифференциальных уравнений вида:

$$[A]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} = 0, \quad (20)$$

где  $\{q\}$  и  $\{\ddot{q}\}$  – векторы обобщенных координат и ускорений,  $[A]$  и  $[C]$  – симметричные и ленточные матрицы масс и жесткости соответственно.

Расчет  $k$  низших собственных форм и частот сводится к обобщенной проблеме на собственные значения, для решения которой применяется метод итераций подпространства собственных векторов.

Рассмотрим многослойную прямолинейную трубу со свободными кромками. Труба изготовлена из ортогонально армированного стеклопластика ( $\varphi = 0/90^\circ$ ). Параметры трубы:  $L = 212$  мм,  $r = 83.5$  мм,  $h = 1.371$  мм. Число слоев – шесть. Характеристики упругости стенки замерены экспериментально [12]:  $E_1 = 18.274$  ГПа,  $E_2 = 18.187$  ГПа,  $G_{12} = 2.93$  ГПа,  $\nu_{12} = 0.21$ . Плотность материала  $\rho = 1662.03$  кг/м<sup>3</sup>.

В табл. 1 результаты расчета МКЭ сопоставлены с данными эксперимента и решения [12], выполненного методом Релея – Ритца.

Параметры  $m$  и  $n$  характеризуют форму колебаний:  $m$  – число полуволин в осевом направлении,  $n$  – число волн в окружном направлении. Расчеты выполнены на регулярных сетках  $M \times N$ :  $4 \times 8$ ,  $5 \times 12$ ,  $7 \times 16$ ,  $9 \times 20$ ,  $10 \times 24$ , где  $M$  и  $N$  – число КЭ в осевом и окружном направлениях. В знаменателе указана погрешность расчета относительно эксперимента.

Анализ таблицы показывает, что при уменьшении размеров сетки имеет место хорошее совпадение экспериментальных данных и результатов, полученных

Табл. 1

Форма колебаний		Собственные частоты, Гц						
$m$	$n$	Эксперимент [12]	Расчет [12]	Расчет МКЭ при сетке $M \times N$				
				$4 \times 8$	$5 \times 12$	$7 \times 16$	$9 \times 20$	$10 \times 24$
1	2	79.8	$\frac{81.9}{3.0\%}$	$\frac{82.6}{3.5\%}$	$\frac{81.9}{2.6\%}$	$\frac{81.8}{2.5\%}$	$\frac{81.8}{2.5\%}$	$\frac{81.8}{2.5\%}$
2	2	88,6	$\frac{88.9}{0.3\%}$	$\frac{89.4}{0.9\%}$	$\frac{88.6}{0\%}$	$\frac{88.6}{0\%}$	$\frac{88.6}{0\%}$	$\frac{88.6}{0\%}$
1	3	225.6	$\frac{231.7}{2.7\%}$	$\frac{242.4}{7.4\%}$	$\frac{233.7}{3.6\%}$	$\frac{232.0}{2.8\%}$	$\frac{231.5}{2.6\%}$	$\frac{231.4}{2.5\%}$
2	3	241.8	$\frac{243.6}{0.7\%}$	$\frac{256.1}{5.3\%}$	$\frac{244.9}{1.3\%}$	$\frac{243.2}{0.6\%}$	$\frac{242.7}{0.4\%}$	$\frac{242.6}{0.3\%}$
1	4	433.4	$\frac{444.2}{2.5\%}$	$\frac{535.7}{23.6\%}$	$\frac{458.5}{5.8\%}$	$\frac{448.2}{3.4\%}$	$\frac{445.1}{2.7\%}$	$\frac{443.9}{2.4\%}$
2	4	455.0	$\frac{458.4}{0.8\%}$	$\frac{548.9}{20.6\%}$	$\frac{472.5}{3.8\%}$	$\frac{461.1}{1.3\%}$	$\frac{458.0}{0.7\%}$	$\frac{456.9}{0.4\%}$
1	5	710.1	$\frac{718.3}{1.2\%}$	$\frac{1035.4}{45.4\%}$	$\frac{776.4}{9.3\%}$	$\frac{736.4}{3.7\%}$	$\frac{724.2}{2.0\%}$	$\frac{719.4}{1.3\%}$
2	5	739.0	$\frac{733.8}{0.7\%}$	$\frac{1073.4}{45.3\%}$	$\frac{794.0}{7.4\%}$	$\frac{750.3}{1.5\%}$	$\frac{737.8}{0.2\%}$	$\frac{733.1}{0.8\%}$
1	6	1036.4	$\frac{1053.5}{1.7\%}$	–	$\frac{1254.7}{21.1\%}$	$\frac{1111.1}{7.2\%}$	$\frac{1074.7}{3.7\%}$	$\frac{1060.6}{2.3\%}$
2	6	1068.0	$\frac{1070.0}{0.2\%}$	–	$\frac{1269.0}{18.8\%}$	$\frac{1126.1}{5.4\%}$	$\frac{1088.8}{1.9\%}$	$\frac{1074.6}{0.6\%}$
3	5	–	1069.3	–	1195.8	1108.6	1082.8	1073.7
3	4	1150.2	$\frac{1134.8}{1.3\%}$	–	$\frac{1200.3}{4.4\%}$	$\frac{1154.7}{0.4\%}$	$\frac{1141.2}{0.8\%}$	$\frac{1136.3}{1.2\%}$
3	6	1249.9	$\frac{1249.8}{0.1\%}$	–	$\frac{1415.4}{13.2\%}$	$\frac{1330.5}{6.4\%}$	$\frac{1277.8}{2.2\%}$	$\frac{1259.3}{0.8\%}$

конечноэлементным методом. Отмечаем в целом хорошее совпадение результатов расчета МКЭ, решения и эксперимента [12]. Приемлемая для практических приложений точность (погрешность менее 3%) обеспечивается, если в полуволну расчетной формы колебаний укладывается не менее полутора КЭ. При сетке  $10 \times 24$  отличие результатов расчета от эксперимента для тринадцати низших частот не превышает 2.5%.

Далее рассмотрим свободные колебания четырех тонкостенных криволинейных труб:  $\Phi_0 = 180^\circ$ ,  $r = 83.5$  мм,  $r/R = 1/10$ ,  $h/r = 1/20$ . Стенки труб образованы перекрестной спиральной намоткой под углом  $\varphi = \pm 45^\circ$ ,  $\pm 60^\circ$ ,  $\pm 75^\circ$ ,  $0/90^\circ$  двух симметричных систем волокон. Количество однонаправленных слоев равно шести. Материал – органопластик Kevlar 49/PR-286. Характеристики упругости:  $E_\alpha = 64.1$  ГПа,  $E_\beta = 5.38$  ГПа,  $G_{\alpha\beta} = 2.07$  ГПа,  $\mu_{\alpha\beta} = 0.35$ . Каждый слой представляется в виде однородной ортотропной среды с линейно упругими свойствами. Средняя плотность многослойного пакета  $\rho = \sum_i \rho_i h_i / h = 1380$  кг/м<sup>3</sup>, где  $\rho_i$  и  $h_i$  – плотность и толщина  $i$ -го слоя.

Упругие характеристики стенки как многослойного ортотропного тела, рассчитанные с применением структурной модели [7], приведены в табл. 2. Граничные условия отражают условия прямой симметрии (рис. 1): в сечении  $s = 0$  перемещения узловых точек  $u = 0$ , в точках с координатами  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  перемещения  $v = 0$ .

В табл. 3 представлены пять низших собственных частот в зависимости от углов армирования  $\pm\varphi$ . В числителе приведены данные расчетов с помощью МКЭ (при сетке  $M = 20$  и  $N = 100$ ), в знаменателе – результаты аналитического

Табл. 2

Угол армирования $\varphi$	$E_1$ , ГПа	$E_2$ , ГПа	$G_{12}$ , ГПа	$\mu_{12}$	$\mu_{21}$
$\pm 45^\circ$	7.447	7.447	16.559	0.799	0.799
$\pm 60^\circ$	5.175	21.555	12.970	0.328	1.366
$\pm 75^\circ$	5.242	51.857	5.942	0.097	0.960
$0/90^\circ$	34.998	34.998	2.070	0.054	0.054

Табл. 3

$\varphi$	Собственные частоты, Гц				
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
$\pm 45^\circ$	33.4/	425.6/	869.1/	1587.5/	2552.5/
	42.1	595.0	960.0	1632.6	2555.1
	(20.7%)	(28.4%)	(9.5%)	(2.8%)	(0.1%)
$\pm 60^\circ$	33.1/	470.2/	1141.4/	2148.3/	3474.7/
	40.1	527.6	1164.8	2158.5	3462.1
	(17.4%)	(10.9%)	(2.0%)	(0.5%)	(0.4%)
$\pm 75^\circ$	34.6/	543.8/	1358.0/	2555.6/	4107.0/
	35.8	549.6	1372.0	2591.8	4176.8
	(3.4%)	(1.1%)	(1.0%)	(1.4%)	(1.6%)
$\pm 0/90^\circ$	53.1/	728.7/	1232.1/	2068.5/	3199.0/
	55.0	776.8	1252.1	2131.3	3335.7
	(3.5%)	(6.2%)	(1.6%)	(2.9%)	(4.1%)

Табл. 4

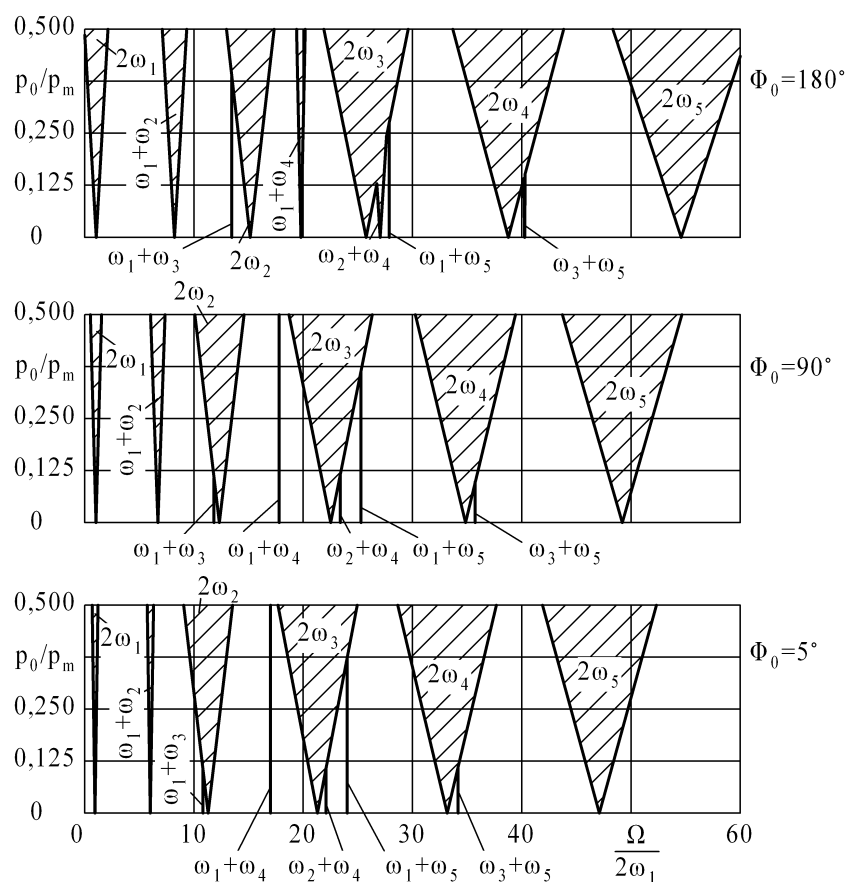
$\Phi_0$	Собственные частоты, Гц				
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
$5^\circ$	41.0	463.3	877.1	1361.3	1937.3
$90^\circ$	39.4	483.5	887.9	1368.2	1942.2
$135^\circ$	37.8	507.5	901.2	1376.9	1948.3
$180^\circ$	35.8	539.3	919.3	1389.0	1956.9

решения (16), полученного методом вращения Якоби (при  $\varepsilon = 0$  и  $\mu = 0$ ). Отметим, что с увеличением углов армирования  $\pm\varphi$  спектр собственных частот возрастает. Результаты аналитического решения в целом согласуются с данными расчета конечноэлементным методом. Наибольшее различие в результатах (до 28.4%) наблюдается при углах армирования  $\varphi = \pm 45^\circ$ , что объясняется, очевидно, погрешностями полубезмоментной модели оболочки.

### 3. Параметрический анализ

На основании решения (16) рассмотрим параметрические колебания многослойных криволинейных труб под действием пульсирующего давления (1). Параметры труб:  $r = 83,5$  мм,  $r/h = 60$ ,  $\varphi = \pm 75^\circ$ ,  $L = 2.623$  м,  $\Phi_0 = 5^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  (соответственно  $r/R = 1/360, 1/20, 1/10$ ). Внутреннее давление  $p_m = 0.5$  МПа. Трубы изготовлены из органопластика Kevlar 49/PR-286, характеристики упругости которого приведены в табл. 2.



Рис. 2. Области неустойчивости в зависимости от угла  $\Phi_0$ 

В табл. 4 приведены расчетные значения низших собственных частот в зависимости от параметра кривизны  $r/R$  (угла изгиба  $\Phi_0$ ). Из таблицы видно, при увеличении кривизны трубы собственная частота  $f_1$ , соответствующая оболочечно-стержневой форме колебаний, уменьшается, а высшие частоты  $f_2, f_3, f_4, f_5$ , соответствующие оболочечным формам, наоборот, увеличиваются.

На рис. 2 на плоскости  $p_0/p_m, \Omega/2\omega_1$  показаны картины областей динамической неустойчивости, соответствующие главным простым  $2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3, 2\omega_4, 2\omega_5$  и комбинационным резонансам суммарного типа  $\omega_1 + \omega_2, \omega_1 + \omega_3, \omega_1 + \omega_4, \omega_1 + \omega_5, \omega_2 + \omega_4, \omega_3 + \omega_5$  (области неустойчивости заштрихованы).

Сравнительный анализ картин рис. 2 показывает, что при уменьшении параметра кривизны  $r/R$  (при «разгибании» трубы) области неустойчивости смещаются в сторону меньших значений  $\Omega/2\omega_1$ , относительная ширина полос уменьшается. При  $\Phi_0 = 5^\circ$  области главного параметрического резонанса  $2\omega_1$  и комбинационного резонанса  $\omega_1 + \omega_2$ , связанные с возбуждением оболочечно-стержневой формы колебаний, стягиваются в узкие полосы (практически в линии). В пределе, при переходе к прямой трубе, комбинационные резонансы, включающие парное взаимодействие собственных форм, исчезают. Сохраняются лишь простые параметрические резонансы  $2\omega_2, 2\omega_3, 2\omega_4, 2\omega_5$ , характерные для тонкостенной цилиндрической оболочки [1–3].

На рис. 3 для трех многослойных композитных образцов с параметрами:  $L = 2.623$  м,  $r = 83.5$  мм,  $r/h = 20$ ,  $\Phi_0 = 180^\circ$ ,  $p_m = 0.5$  МПа построены области

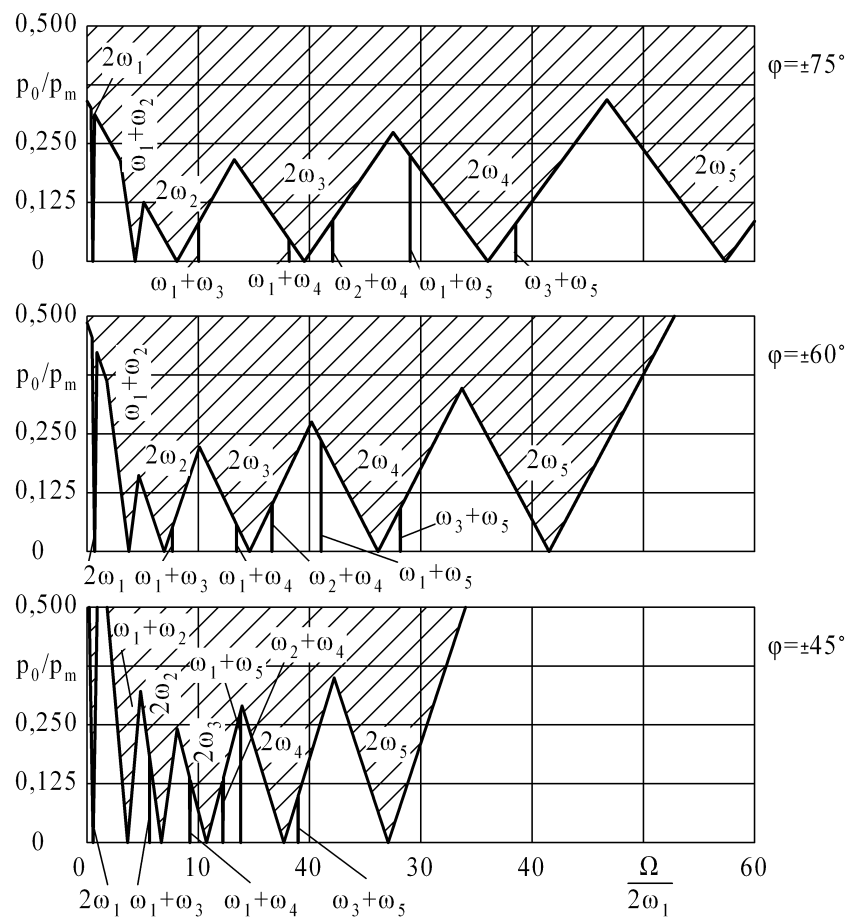
Рис. 3. Области неустойчивости в зависимости от угла армирования  $\pm\varphi$ 

Табл. 5

$p_m$ , МПа	Собственные частоты, Гц				
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
0.5	35.8	539.3	919.3	1389.0	1956.9
1.5	38.8	818.4	1408.0	2039.3	2733.8

динамической неустойчивости в зависимости от углов армирования  $\varphi = \pm 45^\circ$ ,  $\pm 60^\circ$  и  $\pm 75^\circ$ . Заключаем, что увеличение углов армирования  $\pm\varphi$  вызывает удаление резонансных полос друг от друга и смещение их в сторону больших значений  $\Omega/2\omega_1$ . Интервалы частот, соответствующие главным простым резонансам  $2\omega_2$ ,  $2\omega_3$ ,  $2\omega_4$ ,  $2\omega_5$  и суммарному комбинационному резонансу  $\omega_1 + \omega_2$ , расширяются, а при достаточно большом отношении  $p_0/p_m$  сливаются.

В табл. 5 приведены значения низших собственных частот многослойной трубы с параметрами:  $r = 83.5$  мм,  $L = 2.623$  м,  $h/r = 1/60$ ,  $\varphi = \pm 75^\circ$ ,  $\Phi_0 = 180^\circ$  в зависимости от составляющей давления  $p_m$ . Из таблицы видно, что увеличение составляющей давления  $p_m$  обуславливает возрастание собственных частот.

Картина резонансных полос, представленная на рис. 4, свидетельствует о том, что с повышением составляющей давления  $p_m$  области динамической неустойчиво-

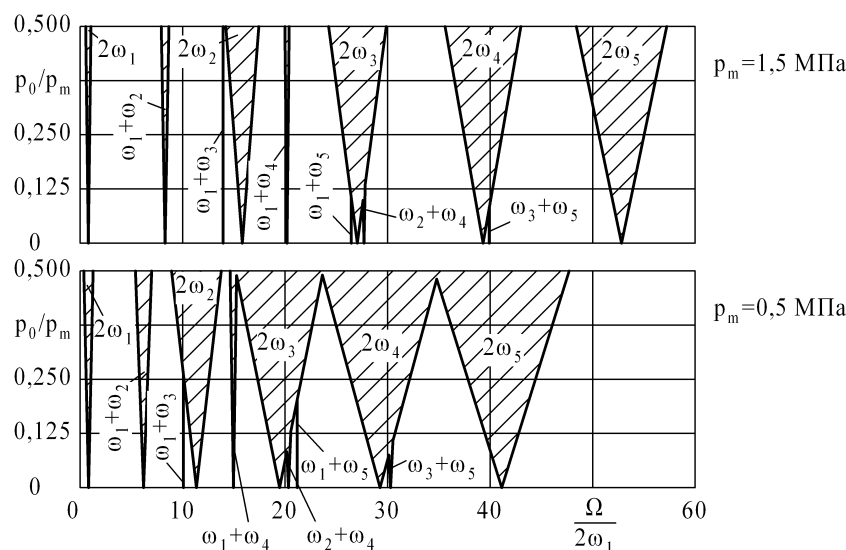
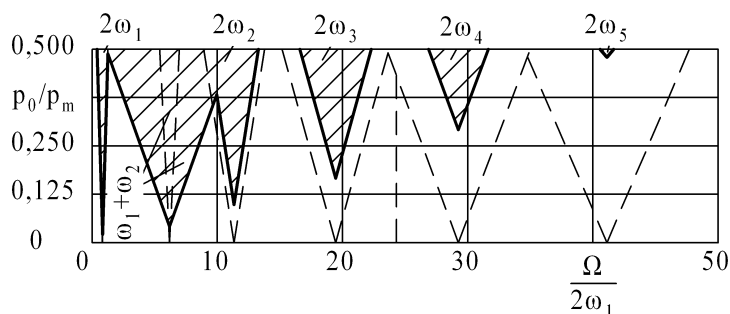
Рис. 4. Области неустойчивости в зависимости от среднего давления  $p_m$ 

Рис. 5. Области неустойчивости в зависимости от демпфирования

сти смещаются в сторону больших значений  $\Omega/2\omega_1$ . Полосы резонансов удаляются друг от друга, относительная ширина полос уменьшается. При давлении  $p_m = 1.5$  МПа суммарные комбинационные резонансы  $\omega_3 + \omega_5$  и  $\omega_2 + \omega_4$  практически исчезают. Таким образом, составляющая внутреннего давления  $p_m$  (в отличие от наружного) является стабилизирующим фактором, препятствующим развитию параметрических резонансов.

На рис. 5 для трубы:  $r = 83.5$  мм,  $L = 2.623$  м,  $h/r = 1/60$ ,  $\varphi = \pm 75^\circ$ ,  $\Phi_0 = 180^\circ$ ,  $p_m = 0.5$  МПа показано влияние демпфирования. Сплошными линиями нанесены границы областей динамической неустойчивости при  $\xi = 4.78 \cdot 10^{-6}$ , штриховыми – при  $\xi = 0$ .

Анализ показывает, что даже слабое демпфирование оказывает заметное влияние на картину резонансных полос. Это влияние имеет противоречивый характер. С одной стороны, демпфирование является стабилизирующим фактором: размеры областей неустойчивости, соответствующие главным простым параметрическим резонансам, сокращаются. С другой стороны, наблюдается обратный, дестабилизирующий эффект. С увеличением демпфирования усиливается связь между собственными формами колебаний, область комбинационного резонанса  $\omega_1 + \omega_2$  заметно расширяется.

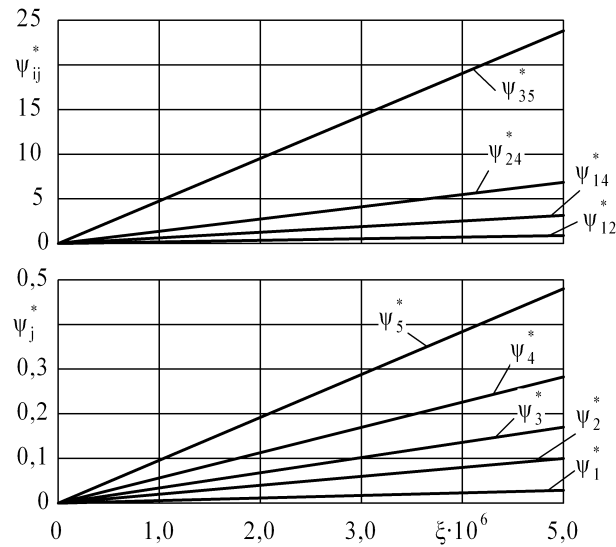


Рис. 6. Критические коэффициенты пульсаций  $\psi_j^*$  и  $\psi_{ij}^*$  в зависимости от относительного демпфирования  $\xi$

Потеря устойчивости осесимметричных форм колебаний системы с демпфированием наступает при амплитудах пульсаций давления, больших некоторого минимального значения. Это значение называется критическим. На рис. 6 представлены зависимости критических коэффициентов пульсаций  $\psi_j^* = (p_0/p_m)_j^*$  и  $\psi_{ij}^* = (p_0/p_m)_{ij}^*$  от относительного демпфирования  $\xi$ . Коэффициенты  $\psi_j^*$  и  $\psi_{ij}^*$  рассчитаны по наименьшим (критическим) значениям коэффициентов возбуждения  $\mu_j^* = 2\varepsilon_j/f_{jj}^*$  и  $\mu_{ij}^* = 2\sqrt{\varepsilon_i\varepsilon_j/|f_{ij}^*f_{ji}^*|}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, k$ ).

Из графиков видно, что влияние демпфирования проявляется тем сильнее, чем выше собственная частота колебаний. В условиях номинального режима работы композитного трубопровода ( $p_0/p_m \leq 0.2$ ) реальную опасность представляют параметрические резонансы в области низших частот возбуждения:  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ,  $2\omega_3$  и  $\omega_1 + \omega_2$ .

### Заключение

Решена задача о параметрических колебаниях многослойных криволинейных композитных труб под действием пульсирующего внутреннего давления. При помощи полубезмоментной теории анизотропных слоистых оболочек и уравнений Лагранжа построена расчетная динамическая модель. Выполнена оценка точности модели. Показано, что расчетные собственные частоты согласуются с данными решения с помощью МКЭ.

Методом малого параметра установлены границы областей динамической неустойчивости. Отличительной особенностью параметрических колебаний тонкостенных криволинейных труб является возникновение, наряду с простыми резонансами, комбинационных резонансов суммарного типа. Исследовано влияние параметров композитной трубы на картину резонансных полос. Установлены следующие закономерности:

- При уменьшении кривизны оси трубы области возбуждения параметрических резонансов смещаются в сторону меньших значений  $\Omega/2\omega_1$ , относительная ширина полос уменьшается. В пределе, при переходе к прямой трубе, комбинацион-

ные резонансы, включающие парное взаимодействие собственных форм, исчезают. В системе сохраняются лишь простые параметрические резонансы.

- Увеличение угла армирования  $\pm\varphi$  вызывает удаление областей неустойчивости друг от друга и смещение их в сторону больших значений  $\Omega/2\omega_1$ . Интервалы частот, соответствующие главным простым и суммарному комбинационному резонансу, расширяются.

- С повышением среднего давления  $p_m$  области возбуждения параметрических резонансов смещаются в сторону больших значений  $\Omega/2\omega_1$ . Полосы резонансов удаляются друг от друга, относительная ширина полос уменьшается. Таким образом, постоянная составляющая внутреннего давления является стабилизирующим фактором, препятствующим развитию параметрических резонансов.

- Демпфирование оказывает заметное влияние на картину резонансных полос. Это влияние носит противоречивый характер. С одной стороны, демпфирование является стабилизирующим фактором. Размеры областей неустойчивости, соответствующие главным параметрическим резонансам, сокращаются. С другой стороны, наблюдается обратный, дестабилизирующий эффект. Он проявляется в усилении связи между собственными формами и расширении области комбинационного резонанса  $\omega_1 + \omega_2$ .

### Summary

*A. V. Korotkov, Yu. A. Kulikov. Parametric Vibrations of Thin-Walled Curved Pipes Made of Reinforced Plastics.*

The article deals with the problem of parametric vibrations of thin-walled curved pipes under internal pulsating pressure. On the basis of semi-momentless theory of anisotropic laminated shells and Lagrange's equations a connected system of homogeneous differential equations with periodic stiffness coefficients has been developed. A calculation of natural modes and frequencies has been carried out. The results of the analytical solution have been compared with the data of FEM calculations and experiments. Using the small parameter method the boundaries of parametric excitation regions have been calculated. The disposition of resonance bands of the main simple and combinational parametric resonances has been analyzed depending on the constant pressure component, as well as the structural, geometric factors and damping.

**Key words:** parametric vibrations, curved pipe, multilayer reinforced plastic, natural modes and frequencies, dynamic stability, parametric resonances.

### Литература

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
2. Вибрации в технике: Справочник в 6 т. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
3. Феодосьев В.И. Прочность теплонапряженных узлов жидкостных ракетных двигателей. – М.: Оборонгиз, 1963. – 212 с.
4. Куликов Ю.А. Виброустойчивость тонкостенной криволинейной трубы под действием пульсирующего внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1993. – № 3. – С. 23–30.
5. Коротков А.В., Куликов Ю.А. Анализ собственных частот колебаний тонкостенных многослойных труб из армированных пластиков // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т. 14, № 2. – С. 236–249.

6. *Коротков А.В., Куликов Ю.А.* Свободные колебания многослойных криволинейных труб из армированных пластиков // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 203–220.
7. *Куликов Ю.А., Лоскутов Ю.В.* Механика трубопроводов из армированных пластиков. – Йошкар-Ола: Изд-во МарГТУ, 2004. – 156 с.
8. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
9. *Стасенко И.В.* Расчет трубопроводов на ползучесть. – М.: Машиностроение, 1986. – 256 с.
10. *Ahmad S., Irons B., Zienkiewicz O.C.* Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements // *Int. J. Num. Mech. Eng.* – 1970. – V. 2, No 3. – P. 419–451.
11. *Зенкевич О.С.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
12. *Chan W., Tse P., Lai T.* Vibration analysis of orthotropic thin cylindrical shells with free ends by the Rayleigh-Ritz method // *J. Sound and Vibr.* – 1996. – V. 195, No 1. – P. 117–135.

Поступила в редакцию  
11.01.10

---

**Коротков Алексей Васильевич** – аспирант кафедры сопротивления материалов и прикладной механики Марийского государственного технического университета, г. Йошкар-Ола.

E-mail: *kv-mail@rambler.ru*

**Куликов Юрий Александрович** – доктор технических наук, профессор кафедры сопротивления материалов и прикладной механики Марийского государственного технического университета, г. Йошкар-Ола.

E-mail: *yurikulikov@mail.ru, kulikovYA@marstu.net*